УДК 517.929

© **В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович**

УПРАВЛЯЕМОСТЬ КАУЗАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим динамическую систему управления вида

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ -h \leqslant t < 0,\ x(0) = x_0\}, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$; A_0, A, A_1 — постоянные $n \times n$–матрицы ($\det A_0 = 0$), B — $n \times m$–матрица; $h > 0$ — запаздывание; $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная n — вектор-функция; x_0 — заданный n-вектор,

и ее дискретный аналог

$$A_0x(t+1) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),\ t \in Z^+, \tag{3}$$

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = q_\tau,\ \tau = -h,\ -h+1, ..., 0\}, \tag{4}$$

где $q_\tau \in R^n$ и запаздывание $h \in N$ $(h \geqslant 1)$.

Пару $\{x_0(\cdot),\ Bu(t)\}$, состоящую из начального состояния (2) (соответственно состояния (4) для системы (3)) и неоднородности $Bu(t)$, $t \geqslant 0$, будем называть допустимой, если система (1), (2) (соответственно система (3), (4)) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t \geqslant 0$. Если для каждой допустимой пары система имеет единственное решение, то она называется совместной.

Пусть $\mathrm{rank}A_0 = r < n$. Без ограничения общности будем считать, что матрица A_0 имеет вид $A_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{array}\right]$, где квадратная $r \times r$ - матрица $A_{11}^{(0)}$ имеет полный ранг. Так как $\mathrm{rank}A_{11}^{(0)} = r$, то это влечет условие $A_{22}^{(0)} - A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} = 0$.

В соответствии с блочным разбиением матрицы A_0 представим матрицы A, A_1, B в виде $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$, $A_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$, и введем матрицы F_{ij}, $i, j = \overline{1,2}$:

$$F_{11} = A_{11},\ F_{12} = -A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} + A_{12},\ F_{21} = -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11} + A_{21},$$

$$F_{22} = A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} - (A_{21}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} + A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}) + A_{22}.$$

Следуя [1,2], будем говорить, что система является каузальной (causal systems), если матрица F_{22} является невырожденной. Условие каузальности системы обеспечивает регулярность тройки матриц (A_0, A, A_1), которая в свою очередь является необходимым и достаточным условием совместности систем (1), (3).

Обозначим

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \hline \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array}\right] = D_1\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array}\right]D_2,\ \left[\begin{array}{c} \overline{B}_1 \\ \hline \overline{B}_2 \end{array}\right] = D_1\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right],\ \Omega = A_{11}^{(0)^{-1}}(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}),$$

$$D_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & F_{22}^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}} & E_{n-r} \end{array}\right],$$

$$D_2 = \left[\begin{array}{c|c} E_r & -A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)} \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline -F_{22}^{-1}F_{21} & E_{n-r} \end{array}\right].$$

Рассмотрим первоначально дискретную систему (3), (4) и введем в рассмотрение так называемые определяющие уравнения:

$$Y_{t+1}^i = \Omega Y_t^i + \Omega_{11} Y_{t-h}^i + \Omega_{12} Z_{t-h}^i, Z_t^i = -\Omega_{21} Y_{t-h}^i - \Omega_{22} Z_{t-h}^i,\ i = \overline{0,3},\ t = 1, 2...,$$

при условиях:

$$Y_0^0 = E_{r,r}, Y_1^0 = \Omega,\ Z_0^0 = 0;\ Y_0^{-1} = 0,\ Y_1^1 = \Omega_{11},\ Z_0^1 = -\Omega_{21};\ Y_0^2 = 0,\ Y_1^2 = \Omega_{12},$$

$Z_1^2 = -\Omega_{22};\ Y_0^3 = 0,\ Y_1^3 = \overline{B}_1,\ Z_0^3 = -\overline{B}_2,\ Z_t^i = Y_t^i = 0,$ при $t > 0$.

Вектор $x \in R^n$ является допустимым в момент времени t, $t \in Z^+$ для системы (3), если существуют векторы $x \in R^n$ и $u \in R^m$ такие, что

$$A_0 \overline{x}(t-1) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t).$$

Пусть $R_0(t)$ - множество всех допустимых векторов системы (3) в момент t.

О п р е д е л е н и е 1. Система (3) называется R_0-управляемой в момент времени t_1 (t_1 - заданное время, $t_1 \in N$), если для любого допустимого начального состояния (4) и любого вектора $x_1 \in R_0(t_1)$ существует последовательность управлений $\{u(0), u(1), ..., u(t_1 - 1)\}$ такая, что решение системы (3), (4) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

О п р е д е л е н и е 2. Система (3) называется t_1 - управляемой, если она R_0 - управляема в момент t_1 и $R_0(t_1)$ совпадает со всем пространством R^n.

Т е о р е м а 1. *Каузальная система (3) R_0 - управляема в момент времени t_1 тогда и только тогда, когда* $rank\{Y_1^3, Y_2^3, ..., Y_{t_1}^3\} = rank A_0$.

Т е о р е м а 2. *Каузальная система (3) t_1 - управляема тогда и только тогда, когда она R_0-управляема в момент t_1 и* $rank(Z_0^3, Z_1^3, ..., Z_{t_1}^3) = n - rank A_0$.

Рассмотрим теперь систему (1), (2) и пусть Ω_0 множество ее допустимых пар в момент времени $t = 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Каузальную систему (1) назовем H-управляемой, если для любого начального условия $x_0(\cdot) \in \Omega_0$ найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$ и достаточно гладкая m-вектор функция $u(t)$, $t \in (0, t_1)$, такие, что для траектории $x(t)$ системы (1), (2) выполняется условие $Hx(t_1) \equiv 0$.

Следуя работам [3–5]для системы (1) ставятся и другие задачи управляемости: относительная управляемость, полная управляемость и т.д. Для указанных видов управляемости получены критерии, выраженные через параметры системы (1).

Список литературы

1. Luenberg D.G. Dynamic equations in descriptor form. // IEEE Trans. Automat. Contr. 1977. Vol.AC 22. P. 312–321.
2. Размыслович Г. П. Управляемость каузальных линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием. // Вестн. БГУ. 1996г. Сер. 1. № 2. С. 72–74.
3. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К проблеме полной управляемости динамических систем. // Дифференц. уравн. 1979г. Т. 15. № 9. С. 1707–1709.
4. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К проблеме управляемости дифференциально-алгебраических динамических систем. // Дифференц. уравн. 2005г. Т 41. № 9. С. 1291–1292.
5. Размыслович Г. П., Крахотко В. В. H-управляемость каузальных дифференциально-алгебраических динамических систем. // Вестник БГУ. 2006г. Сер. 1. № 1. С. 123–125.

Крахотко Валерий Васильевич
Белгосуниверситет,
Беларусь, Минск
e-mail: krakhotko@bsu.by

Размыслович Георгий Прокофьевич
Белгосуниверситет,
Беларусь, Минск
e-mail: razmysl@bsu.by